Exercice 1: Soit E un ensemble et soit $(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2$. On va raisonner par double implication.

$\Leftarrow$: On suppose que $A = B$.
Alors, $A \cup B = A \cup A = A$ et $A \cap B = A \cap A = A$ donc on a bien $A \cup B = A \cap B$.

$\Rightarrow$: Supposons que $A \cup B = A \cap B$.
On veut montrer que deux ensembles sont égaux donc on va raisonner par double inclusion.

$\subset$: Soit $x \in A$.
donc $x \in A \cup B$
donc $x \in A \cap B$ par hypothèse
donc $x \in B$.

$\supset$: Soit $x \in B$.
donc $x \in A \cup B$
donc $x \in A \cap B$ par hypothèse
donc $x \in A$.

Par double inclusion, on a bien $A = B$.

Par double implication, on a bien démontré l'équivalence.

Exercice 2:

$$\mathcal{P}(\{0,1\}) = \{\varnothing,\ \{0\},\ \{1\},\ \{0,1\}\}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(\mathcal{P}(\{0,1\})) &= \{\varnothing,\ \{\varnothing\},\ \{\{0\}\},\ \{\{1\}\},\ \{\{0,1\}\},\ \{\varnothing,\ \{0\}\},\ \{\{0\},\{1\}\},\ \{\{0\},\{0,1\}\},\ \{\varnothing,\ \{1\}\},\ \{\varnothing,\ \{0,1\}\}\} \\ &\bigcup\ \{\{\{1\},\ \{0,1\}\},\ \{\varnothing,\{0\},\{1\}\},\ \{\{0\},\{1\},\{0,1\}\},\ \{\varnothing,\ \{1\},\ \{0,1\}\},\ \{\varnothing,\ \{0\},\ \{0,1\}\}\} \\ &\bigcup\ \{\{\varnothing,\ \{0\},\ \{1\},\ \{0,1\}\}\}\end{aligned}$$

Exercice 3:

1. On raisonne par double inclusion.

   $\subset$: Soit $X \in \mathcal{P}(A \cap B)$.
   Donc $X \subset A \cap B$
   donc $(X \subset A)$ et $(X \subset B)$
   donc $(X \in \mathcal{P}(A))$ et $(X \in \mathcal{P}(B))$
   donc $X \in \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$

   $\supset$: Soit $X \in \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$.
   Donc $(X \in \mathcal{P}(A))$ et $(X \in \mathcal{P}(B))$
   donc $(X \subset A)$ et $(X \subset B)$
   donc $X \subset A \cap B$
   donc $X \in \mathcal{P}(A \cap B)$.

   Par double inclusion, on a bien le résultat demandé.

2. On va montrer que $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subsetneq \mathcal{P}(A \cup B)$.

   Soit $X \in \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$.
   Donc $(X \subset A \subset A \cup B)$ ou $(X \subset B \subset A \cup B)$
   donc $X \subset A \cup B$
   donc $X \in \mathcal{P}(A \cup B)$.

   Soit $X \subset A \cup B$ tel que $X \not\subset A$ et $X \not\subset B$.
   Donc $X \in \mathcal{P}(A \cup B)$ et $X \notin \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$.

3. On va montrer que $\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) \subsetneq \mathcal{P}(A \times B)$.

   Soit $X \in \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$.
   Donc $\exists (Y, Z) \in \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B), X = (Y, Z)$
   donc $Y \subset A$ et $Z \subset B$,
   d'où $(Y, Z) \subset A \times B$,
   donc $X = (Y, Z) \in \mathcal{P}(A \times B)$.

   Soit $A = B = \{0, 1\}$.
   Posons $X = \{(0, 1), (1, 0)\} \subset A \times B$.
   On a $X \in \mathcal{P}(A \times B)$ mais $X \notin \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$.

Exercice 4:

1. (a) S'il existe $\mathbf{X}$ une solution de l'équation, on a
   $A \subset A \cup \mathbf{X} \Rightarrow A \subset B$.
   Par contraposé, si $A \not\subset B$ alors il n'y a pas de solution.

(b) Analyse: Supposons qu'il existe une solution $\mathbf{X}$.
$\mathbf{X} \subset A \cup \mathbf{X} \Rightarrow \mathbf{X} \subset B$.
Soit $x \in B \backslash A$.
Donc $(x \in B)$ et $(x \notin A)$
donc $(x \in A \cup \mathbf{X})$ et $(x \notin A)$
donc $x \in \mathbf{X}$.
On a donc $B \backslash A \subset \mathbf{X} \subset B$.

(c) Synthèse: Soit $\mathbf{X}$ tel que $B \backslash A \subset \mathbf{X} \subset B$.
Donc $(\mathbf{X} \subset B)$ et $(A \subset B)$
donc $\mathbf{X} \cup A \subset B$.
Donc $(B \backslash A \subset \mathbf{X})$ et $A \subset A$
donc $(B \backslash A) \cup A \subset \mathbf{X} \cup A$
donc $B \subset \mathbf{X} \cup A$.
Par double inclusion, on a bien $B = \mathbf{X} \cup A$.

(d) Finalement, l'ensemble des solutions est $S = \{\mathbf{X} \subset E, \ \ B \backslash A \subset \mathbf{X} \subset B\}$.

2. En raisonnant de même, on trouve que l'ensemble des solutions est $S = \left\{\mathbf{X} \subset E, \ \ B \subset \mathbf{X} \subset B \cup \overline{A}\right\}$.

Exercice 5:

Montrons que $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \left[-1+\frac{1}{n}; \frac{1}{n}\right] =]-1,1]$.

$\subset$: Soit $x \in \displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \left[-1+\frac{1}{n}; \frac{1}{n}\right]$.
Donc il existe $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in \left[-1+\frac{1}{n}; \frac{1}{n}\right]$ i.e. $-1 < -1+\frac{1}{n} \leq x \leq \frac{1}{n} \leq 1$ d'où $x \in]-1,1]$.

$\supset$: Soit $x \in]-1,1]$.
Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $x \in \left[-1+\frac{1}{n_0}; 1\right]$. D'où $x \in \left[-1+\frac{1}{n_0}; \frac{1}{n_0}\right] \bigcup \left[-1+\frac{1}{1}; \frac{1}{1}\right] \subset \displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \left[-1+\frac{1}{n}; \frac{1}{n}\right]$.

Montrons que $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \left[-1+\frac{1}{n}; \frac{1}{n}\right] = \{0\}$.

$\subset$: Soit $x \in \displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \left[-1+\frac{1}{n}; \frac{1}{n}\right]$.
Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x \leq \frac{1}{n}$. Par passage à la limite quand $n \to +\infty$, $x \leq 0$.
Et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x \geq -1+\frac{1}{n}$, en particulier pour $n = 1$, $x \geq 0$. D'où $x = 0$.

$\supset$: Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \in \left[-1+\frac{1}{n}; \frac{1}{n}\right]$ donc $\{0\} \subset \displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \left[-1+\frac{1}{n}; \frac{1}{n}\right]$.

Exercice 6:

1. $D_f = \mathbb{R}$ comme polynôme de degré 2 et $f(\mathbb{R}) = [-1; +\infty[$.

(a) Injectivité ? $f(1) = 0$ et $f(3) = 0$ donc on a proposé deux points différents qui ont le même image donc
f n'est pas injective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

On va restreindre l'ensemble de départ pour rendre cette fonction injective.
Soit $(x, y) \in]2; +\infty[^2$ tel que $f(x) = f(y)$.
Donc $x^2 - 4x + 3 = y^2 - 4y + 3$

donc $x^2 - 4x = y^2 - 4y$
donc $x^2 - y^2 - 4x + 4y = 0$
donc $(x - y)(x + y) - 4(x - y) = 0$
donc $(x - y)(x + y - 4) = 0$
donc $x = y$ ou $x + y = 4$.
Or, $x + y > 4$ donc on a $x = y$.
La fonction f est injective de $]2; +\infty[$ dans $\mathbb{R}$.

(b) Surjectivité ? Soit $y \in \mathbb{R}$. Supposons qu'il existe un réel x tel que $f(x) = y$.

$$\begin{aligned} x^2 - 4x + 3 &= y \\ x^2 - 4x + 3 - y &= 0 \\ \Delta &= 4(1 + y) \end{aligned}$$

Si $y < -1$, cette équation n'a pas de solutions dans $\mathbb{R}$. La fonction f n'est pas une surjection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.
Si $y \geq -1$, ce polynôme admet deux racines réelles et y a deux antécédents dans $\mathbb{R}$ par f.
La fonction f est surjective de $\mathbb{R}$ sur $[-1; +\infty[$

(c) Bijectivité ? La fonction f est bijective de $]2; +\infty[$ dans $[-1; +\infty[$.

2. $D_f = \left[-\dfrac{3}{2}; +\infty\right[$ et $f(D_f) = [-1; +\infty[$.

(a) Injectivité ? Soit $(x, y) \in D_f^2,\ f(x) = f(y)$.
Donc $\sqrt{2x + 3} - 1 = \sqrt{2y + 3} - 1$
donc $2x + 3 = 2y + 3$
donc $x = y$
Donc la fonction est injective f de $\left[-\dfrac{3}{2}; +\infty\right[$ dans $f(D_f) = [-1; +\infty[$.

(b) Surjectivité ? Soit $y \in [-1; +\infty[$.
$x = \dfrac{(y + 1)^2 - 3}{2}$ est un antécédent de y par f.
Donc, f est surjective de $\left[-\dfrac{3}{2}; +\infty\right[$ dans $f(D_f) = [-1; +\infty[$.

(c) Bijectivité ? La fonction f est bijective de $\left[-\dfrac{3}{2}; +\infty\right[$ dans $f(D_f) = [-1; +\infty[$.

3. $D_f = \mathbb{R}$ et $f(\mathbb{R}) = [-1; 1]$.

(a) Injectivité ? Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $f(x) = f(y)$.
On doit avoir x et y de même signe pour avoir $f(x) = f(y)$.
Si $x, y > 0$,

$$f(x) = f(y) \Rightarrow \frac{x}{1 + x} = \frac{y}{1 + y} \Rightarrow x(1 + y) = y(1 + x) \Longrightarrow x + xy = y + xy \Rightarrow x = y$$

Si $x, y \leq 0$,

$$f(x) = f(y) \Rightarrow \frac{x}{1 - x} = \frac{y}{1 - y} \Rightarrow x(1 - y) = y(1 - x) \Longrightarrow x - xy = y - xy \Rightarrow x = y$$

f est donc injective de $\mathbb{R}$ dans $[-1; 1]$.

(b) Surjectivité Soit $y \in [-1; 1]$.
Si $y < 0$, posons $x = \dfrac{y}{1 + y}$. Alors, $f(x) = y$.
Si $y \geq 0$, posons $x = \dfrac{y}{1 - y}$. Alors, $f(x) = y$.
Donc, f est surjective de $\mathbb{R}$ dans $[-1; 1]$.

(c) Bijectivité La fonction f est bijective de $\mathbb{R}$ dans $[-1;1]$.

4. $D_f = \mathbb{N}$ et $f(\mathbb{N}) = \mathbb{Z}$.

   (a) Injectivité ? Soit $(n,m) \in \mathbb{N}^2$ tels que $f(n) = f(m)$
   Quatre cas sont alors possibles :
   - n et m sont tous les deux pairs. Dans ce cas, $\dfrac{n}{2} = \dfrac{m}{2} \Rightarrow n = m$.
   - n et m sont tous les deux impairs. Dans ce cas, $\dfrac{-(n+1)}{2} = \dfrac{-(m+1)}{2} \Rightarrow n = m$.
   - n est pair et m est impair. Dans ce cas, $f(n) \geq 0$ et $f(m) < 0$ donc $f(n) \neq f(m)$.
   - n est impair et m est pair. Dans ce cas, $f(n) < 0$ et $f(m) \geq 0$ donc $f(n) \neq f(m)$.

   Finalement, $\forall (n,m) \in \mathbb{N}^2,\ f(n) = f(m) \Rightarrow n = m$. La fonction f est injective de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{Z}$.

   (b) Surjectivité ? Soit $y \in \mathbb{Z}$. Deux cas sont possibles:
   - Si $y \in \mathbb{Z}_+ = \mathbb{N}$. Posons $n = 2y$. Il s'agit d'un entier pair donc $f(n) = \dfrac{2y}{2} = y$.
     y admet un antécédent par f.
   - Si $y \in \mathbb{Z}_-^* = -\mathbb{N}^*$. Posons $n = -2y-1$. Il s'agit d'un entier impair donc $f(-2y-1) = \frac{-(-2y-1+1)}{2} = y$
     y admet un antécédent par f.

   Finalement, f est surjective de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{Z}$.

   (c) Bijectivité ? La fonction f est bijective de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{Z}$.

Exercice 7: Soient f et g deux applications de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ définies par

$$\forall n \in \mathbb{N},\ f(n) = 2n \text{ et } g(n) = \begin{cases} \dfrac{n}{2} \text{ pour } n \text{ pair} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

1. 3 n'as pas d'antécédent par f donc f n'est pas surjective de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.
   Soit $(n,m) \in \mathbb{N}^2,\ \ f(n) = f(m) \Rightarrow n = m$ donc f est injective de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.

   $g(3) = g(5)$ donc g n'est pas injective de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.
   Soit $n \in \mathbb{N}$. $2n$ est un antécédent de n par g donc g est surjective de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$(f \circ f)(n) = 4n \quad , \quad (f \circ f \circ f)(n) = 8n$$

$$(g \circ g)(n) = \begin{cases} \dfrac{n}{4} \text{ pour } n \text{ divisible par } 4 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \quad , \quad (g \circ g \circ g)(n) = \begin{cases} \dfrac{n}{8} \text{ pour } n \text{ divisible par } 8 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

$$(f \circ g)(n) = \begin{cases} n \text{ pour } n \text{ est pair} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \quad , \quad (g \circ f)(n) = n$$

3. $g \circ f$ est bijective, $g \circ g \circ g$ et $g \circ g$ sont surjectives par composée, $f \circ f \circ f$ et $f \circ f$ sont injectives par composée et $f \circ g$ n'est ni injective ni surjective.

Exercice 8: Soit $f \in \mathcal{F}(E,F)$ et soit $g \in \mathcal{F}(F,G)$.

1. Supposons la fonction $g \circ f$ injective de E dans G.
   Soit $(x,y) \in E^2$ tel que $f(x) = f(y)$.
   Donc $g[f(x)] = g[f(y)]$,
   donc $x = y$ (car $g \circ f$ est injective).
   La fonction f est donc injective dans E dans F.

2. Supposons la fonction $g \circ f$ surjective de E dans G. On veut montrer que g est surjective de F dans G.
   Soit $y \in G$.
   Puisque $g \circ f$ est surjective de E dans G, $\exists x \in E$ tel que $(g \circ f)(x) = y$ que l'on peut réecrire $g[f(x)] = y$.
   Or, $f(x) \in F$.
   On notant $z = f(x)$, on a bien : $\exists z \in F$ tel que $g(z) = y$.
   La fonction g est surjective de E dans F.

3. Prenons $f : \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x \end{array} \right.$ et $g : \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 \end{array} \right.$. On a f injective et $g \circ f$ non injective.
   Prenons $g : \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x \end{array} \right.$ et $f : \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 \end{array} \right.$. On a g surjective et $g \circ f$ non surjective.
   Les deux réciproques sont fausses.

Exercice 9:

1. Soit $y \in F$. $f \circ g = \mathrm{id}$ donc $y = (f \circ g)(y)$ donc $g(y)$ est un antécédent de y par f.
   Donc, f est surjective de E dans F.

2. Soit $(x, y) \in E^2$ tel que $f(x) = f(y)$.
   Donc $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(y)$
   donc $x = y$.
   Donc f est injective de E dans F.

Exercice 10:

1. Soit $A \in \mathcal{P}(E)$. On rappelle les définitions : $f(A) = \{f(x),\ x \in A\}$ et $f^{-1}(f(A)) = \{x \in E,\ f(x) \in f(A)\}$.
   Soit $x \in A$.
   Donc $f(x) \in f(A)$
   donc $x \in f^{-1}(f(A))$.
   Donc, $A \subset f^{-1}(f(A))$.

2. On va raisonner par double implication.

   $\underline{\Rightarrow}$: Supposons f injective de E dans F.
   Soit $A \in \mathcal{P}(E)$. On sait déjà que $A \subset f^{-1}(f(A))$. Il reste à montrer l'inclusion dans l'autre sens.
   Soit $x \in f^{-1}(f(A))$.
   Donc $f(x) \in f(A)$.
   Donc $\exists y \in A, f(x) = f(y)$.
   Donc $x = y$ car f est injective de E dans F.
   Donc $x \in A$.
   Donc, $f^{-1}(f(A)) \subset A$. Par double inclusion, $f^{-1}(f(A)) = A$.

   $\underline{\Leftarrow}$: Supposons que $\forall A \in \mathcal{P}(E),\ A = f^{-1}(f(A))$.
   On veut montrer que f est injective de E dans F. Soit $(x, y) \in E^2$ tels que $f(x) = f(y)$.
   Donc $f(y) \in f(\{x\})$ d'où $y \in f^{-1}(f(\{x\}))$
   Or, $f^{-1}(f(\{x\})) = \{x\}$ par hypothèse
   Donc, $y \in \{x\}$
   Donc, $y = x$ et f est bien injective de E dans F.

3. Soit $B \in \mathcal{P}(F)$. On rappelle les définitions : $f^{-1}(B) = \{x \in E\ /\ f(x) \in B\}$ et $f(f^{-1}(B)) = \left\{f(y),\ y \in f^{-1}(B)\right\}$.
   Soit $x \in f(f^{-1}(B))$.
   Donc $\exists y \in f^{-1}(B)$ tel que $x = f(y)$.
   Or, $y \in f^{-1}(B)$ donc $f(y) \in B$.
   Donc, $x (= f(y)) \in B$. Donc, $f(f^{-1}(B)) \subset B$.

4. On va raisonner par double implication.

   $\Rightarrow$: Supposons f surjective de E dans F.
   Soit $B \in \mathcal{P}(F)$. On sait déjà que $f(f^{-1}(B)) \subset B$. Il reste à montrer l'inclusion dans l'autre sens.
   Soit $y \in B$.
   Donc $\exists x \in E$ tel que $f(x) = y$. (par surjectivité de f)
   Or, $f(x)(=y) \in B$ donc $x \in f^{-1}(B)$.
   Donc, $y(=f(x)) \in f(f^{-1}(B))$.
   Donc, $B \in f(f^{-1}(B))$. Par double inclusion, $B = f(f^{-1}(B))$.

   $\Leftarrow$: Supposons que $\forall B \in \mathcal{P}(F),\ B = f(f^{-1}(B))$.
   On veut montrer que f est surjective de E dans F. Soit $y \in F$. Posons $B = \{y\}$.
   Par hypothèse, $B = f(f^{-1}(B))$ donc $\{y\} = f(f^{-1}(\{y\}))$.
   Donc, $y \in f(f^{-1}(\{y\}))$.
   D'où $\exists x \in f^{-1}(\{y\})$ tel que $y = f(x)$ donc y admet donc un antécédent par f dans E.
   La fonction f est surjective de E dans F.

Exercice 11:

1. Soit $X \in \mathcal{P}(E)$. On a bien $X \cap A \subset A$ et $X \cap B \subset B$ donc $(A \cap X\ ,\ B \cap X) \in \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$. La fonction f est bien définie.

2. Supposons que $A \cup B = E$.
   Soit $(X, Y) \in \mathcal{P}(E)^2$ tel que $(A \cap X\ ,\ B \cap X) = (A \cap Y\ ,\ B \cap Y)$.
   donc $A \cap X = A \cap Y$ et $B \cap X = B \cap Y$.
   On va montrer que $X = Y$. Soit $x \in X$. Alors, $x \in X \cap (A \cup B)$.
   donc $x \in A \cap X$ ou $x \in B \cap X$.
   donc $x \in A \cap Y$ ou $x \in B \cap Y$.
   donc $x \in Y$ et donc $X \subset Y$.
   Par symétrie, on a $Y \subset X$ puis $X = Y$ donc f est injective.

3. Supposons $A \cap B = \varnothing$.
   Soit $Z \in \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$.
   $\exists\ A_1 \subset A,\ \ \exists\ B_1 \subset B$ tel que $Z = (A_1, B_1)$.
   Posons $X = A_1 \cup B_1$. On a $A \cap X = A \cap (A_1 \cup B_1) = (A \cap A_1) \cup (A \cap B_1) = A_1 \cup \varnothing = A_1$.
   De même, $B \cap X = B_1$. D'où $f(X) = (A_1, B_1) = Z$. Donc, f est surjective.

4. On suppose que f est bijective. La bijection réciproque est la fonction $f^{-1} : \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) \to \mathcal{P}(E) \\ (A_1\ ,\ B_1) \mapsto A_1 \cup B_1 \end{array} \right.$.

Exercice 12:

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{1}_{A \Delta B} & = & \mathbb{1}_{(A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A})} \\ & = & \mathbb{1}_{A \cap \overline{B}} + \mathbb{1}_{(B \cap \overline{A})} - \mathbb{1}_{A \cap \overline{B}} \mathbb{1}_{(B \cap \overline{A})} \\ & = & \mathbb{1}_A \mathbb{1}_{\overline{B}} + \mathbb{1}_B \mathbb{1}_{\overline{A}} \\ & = & \mathbb{1}_A (1 - \mathbb{1}_B) + \mathbb{1}_B (1 - \mathbb{1}_A) \\ & = & \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - 2 \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B \end{array}$$

Exercice 13: Soit $f : E \to [\![1, n]\!]$ une application surjective.
Pour $i \in [\![1, n]\!]$, on note $A_i = f^{-1}(\{i\})$.

1. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $A_i \neq \emptyset$ par surjectivité de f.

2. Soient $i, j \in [\![1, n]\!]$ tel que $i \neq j$. Supposons par l'absurde que $A_i \cap A_j \neq \emptyset$.
   Soit $x \in A_i \cap A_j$, donc $x \in A_i$ d'où $f(x) = i$ et $x \in A_j$ d'où $f(x) = j$. On en déduit que $i = j$ ce qui est absurde. Donc pour tout $i, j \in [\![1, n]\!]$ tel que $i \neq j$, $A_i \cap A_j = \emptyset$.

3. Montrons que $\bigcup_{i \in [\![1,n]\!]} A_i = E$.
   Soit $x \in E$, on a $f(x) \in [\![1,n]\!]$. D'où $x \in A_{f(x)}$ et donc $x \in \bigcup_{i \in [\![1,n]\!]} A_i$. On a donc $E \subset \bigcup_{i \in [\![1,n]\!]} A_i$. On a également $\bigcup_{i \in [\![1,n]\!]} A_i \subset E$. Par conséquent, $\bigcup_{i \in [\![1,n]\!]} A_i = E$.

Conclusion : les $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ forment une partition de E.

Exercice 14: Supposons par l'absurde qu'il existe une surjection f de E dans $\mathcal{P}(E)$.
Considérons $A = \{x \in E, x \notin f(x)\}$. On a que $A \in \mathcal{P}(E)$, d'après l'hypothèse de surjectivité, A admet un antécédent par f que l'on note a ($f(a) = A$).

- Si $a \in A$, alors $a \notin f(a) = A$. Absurde.
- Si $a \notin A = f(a)$, alors $a \in A$. Absurde.

Conclusion : il n'existe pas de surjection de E dans $\mathcal{P}(E)$.